Durée : 4 heures

Prévoir une feuille de papier millimétré par candidat

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, on appellera difféomorphisme de I sur J toute application $f : I \to J$ bijective, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) et telle que son application réciproque, notée f^{-1}, soit aussi de classe C^1.

Si A est un ensemble, id_A désignera l'application identité de A dans A.

A. *Étude des groupes de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$*

1° Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f un difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si on pose, pour $(u, v) \in I^2$:

$$u * v = f^{-1}[f(u) + f(v)]$$

alors $(I, *)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ et l'application $M : I \times I \to I$, définie par $M(u, v) = u * v$, admet des dérivées partielles continues sur $I \times I$. Calculer $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u, e)$, où e désigne l'élément neutre de $(I, *)$.

2° On se propose de démontrer la réciproque du 1°. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point (on ne suppose pas a priori que I est ouvert); soit $*$ une loi de groupe sur I (qu'on ne suppose pas a priori commutative), dont on notera e l'élément neutre. Si u et v appartiennent à I, on notera $g_u(v)$ l'élément $u * v$. On suppose que, pour tout u fixé, l'application g_u ainsi définie est dérivable et on notera g'_u l'application dérivée de g_u.

a. Montrer que pour tout $(u, v) \in I^2$ on a $g'_u(v) \neq 0$.

b. Montrer que pour tout $(u, s) \in I^2$ on a $g'_u(s)\, g'_s(e) = g'_{u*s}(e)$.

c. On suppose que l'application $u \to g'_u(e)$ est continue.

On pose pour $s \in I$, $a(s) = \dfrac{1}{g'_s(e)}$ et, pour $u \in I$, $f(u) = \displaystyle\int_e^u a(s)\, ds$.

— Montrer que pour tout $(u, v) \in I^2$, $f(u * v) = f(u) + f(v)$.

— En déduire que f est un difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $(u, v) \in I^2$, $u * v = f^{-1}[f(u) + f(v)]$.

— Montrer que I est nécessairement ouvert.

Dans toute la suite du problème, les notations I, $*$, f, a, e désignent les êtres mathématiques introduits en A.2°.

B. *Étude des groupes de transformation à un paramètre*

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne pour tout $u \in I$ une application $T_u : D \to D$ de telle sorte que :

$$\forall (u, v) \in I^2 \qquad T_u \circ T_v = T_{u*v}$$
$$\text{et} \qquad T_e = id_D$$

On suppose que, pour tout $z \in D$ fixé, l'application $T^z : u \to T_u(z)$, de I dans D, est dérivable au point $u = e$; on note $h(z)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ égal à la valeur de la dérivée de T^z au point e.

1° *a.* On pose, si $t \in \mathbb{R}$, $S_t(z) = T_{f^{-1}(t)}(z)$. A quoi est égal $S_t \circ S_s$?

Montrer que, pour tout $z \in D$ fixé, l'application $S^z : t \to S_t(z)$ de $\mathbb{R}$ dans D est dérivable au point $t = 0$. En déduire qu'elle est dérivable en tout point t de $\mathbb{R}$. On notera $\dot{S}^z(t)$ la valeur de sa dérivée au point t. Montrer qu'on a les relations :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in D \qquad \dot{S}^z(t) = h[S^z(t)], \quad S^z(0) = z.$$

b. Déduire de a que, pour tout $z \in D$, l'application T^z est dérivable en tout point u de I et que, en notant $\dot{T}^z(u)$ la valeur de sa dérivée au point u, on a les relations :

$$\forall u \in I, \ \forall z \in D \qquad \dot{T}^z(u) = a(u)\, h[T^z(u)], \quad T^z(e) = z.$$

2° Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On notera $LF(z)$ la valeur de la dérivée au point $u = e$ de l'application $u \to F \circ T_u(z)$ de I dans $\mathbb{R}$ (z étant fixé).

a. Calculer $LF(z)$.

b. Montrer l'équivalence : $(\forall u \in I, F \circ T_u = F) \Leftrightarrow (\forall z \in D, LF(z) = 0)$.

On suppose que, pour tout $u \in I$, l'application T_u est différentiable. Soit z un point de D. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

α. $h(z) = 0$.

β. $\dot{T}^z(u) = 0$ pour tout $u \in I$.

γ. z est un point fixe (c'est-à-dire $T_u(z) = z$ pour tout $u \in I$).

4° On suppose que $D = \mathbb{R}^n$ et que, pour tout $u \in I$, l'application T_u est linéaire. Montrer que h est une application linéaire.

Montrer que l'application $u \to \det(T_u)$ de I dans $\mathbb{R}$ est dérivable et prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

On pose, si $t \in \mathbb{R}$, $k(t) = \text{Log}[\det(S_t)]$ (notation de 1° *a*.).

Montrer que, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on a $k(t+s) = k(t) + k(s)$. En déduire qu'il existe une constante c telle que pour tout $u \in I$ on ait :

$$\det(T_u) = \exp[c f(u)]$$

Dans le cas où $n = 2$ (pour simplifier), montrer que $c = tr(h)$ (où $tr(h) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$, si h est représentée par la matrice (h_{ij}) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

C. *Un exemple*

On particularise, dans cette partie, la situation décrite dans la partie B dont on conserve les notations. On suppose $D = \mathbb{R}^2$ et $I =]-1, 1[$.

On pose, si $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et si $u \in I$:

$$T_u(x, y) = \left(\frac{x - uy}{\sqrt{1 - u^2}}, \frac{y - ux}{\sqrt{1 - u^2}} \right)$$

1° Montrer qu'il existe une loi de groupe sur I, qu'on notera $*$, telle que l'on ait :

$$T_u \circ T_v = T_{u * v}, \quad T_0 = id_{\mathbb{R}^2}.$$

Calculer les fonctions α et f correspondantes et donner la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2° Écrire sous une forme simple et explicite la matrice de S_t dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3° Montrer que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = x^2 - y^2$ vérifie, pour tout $u \in I$, $F \circ T_u = F$.

4° Pour $z_0 = (x_0, y_0)$ fixé, dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'orbite de z_0 (c'est-à-dire l'ensemble des points $T_u(z_0)$ lorsque u décrit I). On ne cherchera pas un dessin précis (il sera cependant soigné) mais on indiquera précisément la nature géométrique de l'orbite de z_0. On distinguera suivant les régions du plan auxquelles peut appartenir z_0.

D. *Étude des groupes de transformation à un paramètre sur* $\mathbb{R}$

1° Soit D un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et k un difféomorphisme de D sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $(u, z) \in I \times D$, $T_u(z) = k^{-1}[f(u) + k(z)]$. Montrer que l'application $T : (u, z) \to T_u(z)$ de $I \times D$ dans D admet des dérivées partielles continues, que $T_{u*v} = T_u \circ T_v$, $T_e = id_D$. On pose, pour z dans D, $h(z) = \frac{\partial T}{\partial u}(e, z)$. Calculer $h(z)$ et montrer que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$.

2° On se propose de démontrer la réciproque du 1°. Soit D un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et, pour tout $u \in I$, soit T_u une application de D dans D de telle sorte que $T_u \circ T_v = T_{u*v}$, $T_e = id_D$ et que, pour tout $z \in D$, l'application $T^z : u \to T_u(z)$ soit dérivable. On note $h(z)$ la dérivée de cette application au point $u = e$ et on suppose que l'application h est continue et ne s'annule pas sur D.

a. On pose, pour tout $z \in D$, $k(z) = \int_c^z \frac{dx}{h(x)}$ où c est un point quelconque mais fixé de D.

Montrer que, pour tout $(u, z) \in I \times D$, on a

$$k[T_u(z)] - k[z] = f[u].$$

b. En déduire que k est un difféomorphisme de D sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $(u, z) \in I \times D$, on a $T_u(z) = k^{-1}[f(u) + k(z)]$.

c. En déduire que, pour tout $u \in I$, T_u est un difféomorphisme de I sur D.